1 Область сходимости ряда

1.1 Радиус сходимости

Общий вид степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

Интервал $(a_0 - R; a_0 + R)$ называется **интервалом сходимости** действительного степенного ряда. В каждой точке интервала сходимости ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне отрезка $[x_0 - R; x_0 + R]$ ряд расходится. На границах интервала сходимости, т.е. в точках $x = x_0 \pm R$ ряд может как сходится, так и расходится.

Число R называется **радиусом сходимости**.

Интервал сходимости ряда определяют с помощью признака Даламбера или признака Коши, применённых к знакоположительному ряду

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-a)^n|$$

составленному из абсолютных величин членов исходного степенного ряда.

Для вычисления радиуса сходимости R степенного ряда применяются также формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

и

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

в тех случаях, когда указанные пределы существуют.

Пример 1. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{(2n^2+3)2^n}(x-3)^n$$

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n^2+3)2^n \cdot ((n+1)^2+2n+2)\cdot(x-3)^{n+1}}{(n^2+2n)\cdot(x-3)^n\cdot(2(n+1)^2+3)2^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{|x-3|\cdot(2n^4+...)}{2\cdot(2n^4+...)} =$$

$$= \frac{|x-3|}{2} < 1$$

раскроем модуль

$$-1 < \frac{x-3}{2} < 1$$

$$-2 < x-3 < 2$$

$$1 < x < 5$$

Исследуем сходимость рядов на концах этого интервала.

При $x = 1$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+2n}{(2n^2+3)2^n}(-2)^n$$

Исследуем на сходимость ряд из абсолютных величин членов этого ряда используя признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n^2+3)2^n\cdot((n+1)^2+2n+2)\cdot(-2)^{n+1}}{(n^2+2n)\cdot(-2)^n\cdot(2(n+1)^2+3)2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)\cdot(2n^4+...)}{2n^4+...} = -1$$

$-1 < 1$, значит при $x = 1$ ряд абсолютно сходящийся.

При $x = 5$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+2n)2^n}{(2n^2+3)2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2n}{2n^2+3}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n}{2n^2+3} = \frac{1}{2}$$

$\frac{1}{2} \neq 0$ значит при $x = 5$ ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости.

Ответ: $[1;5)$

Пример 2. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n^3+n)2^n}(x-1)^n$$

Применим признак Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+3)\cdot(x-1)^{n+1}\cdot(3n^3+n)2^n}{(3(n+1)^3+n+1)2^{n+1}\cdot(n+2)\cdot(x-1)^n}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{|x-1|\cdot(3n^4+...)}{2\cdot(3n^4+...)} =$$

$$\frac{|x-1|}{2} < 1$$

раскроем модуль

$$-1 < \frac{x-1}{2} < 1$$

$$-2 < x-1 < 2$$

$$-1 < x < 3$$

Исследуем сходимость рядов на концах этого интервала.

При $x = -1$ получим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n^3+n)2^n}(-2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{3n^3+n}$$

составим ряд из абсолютных величин этого ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^3+n}$$

Сравним ряд составленный из абсолютных величин с рядом Дирихле имеющим вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Как известно, данный ряд Дирихле сходится так как $p > 1$. Применим признак сравнения:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+2}{3n^3+n} : \frac{1}{n^2} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+2n^2}{3n^3+n} = \frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3} \neq 0$, значит так как ряд Дирихле сходится, то и сравниваемый ряд сходится.

Так как ряд из абсолютных величин сходится, то исходный ряд при $x = -1$ является абсолютно сходящимся.

Проверим ряд при $x = 3$. Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(3n^3+n)2^n}(2)^n =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^3+n}$$

В предыдущем пункте при сравнении мы установили, что данный ряд сходится.

Ответ: $[-1; 3]$

Пример 3. Найти область сходимости ряда.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\cdot 2^n}{n^3+2n}(x-1)^n$$

Найдём радиус сходимости

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| =$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1)\cdot 2^n \cdot ((n+1)^3+2n+2)}{(n^3+2n)\cdot((n+1)^2+1)\cdot 2^{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^5+...}{2\cdot(n^5+...)} = \frac{1}{2}$$

Интервал сходимости по определению: $(a_0 - R; a_0 + R)$, в нашем случае $R = \frac{1}{2}$, $a_0 = 1$, значит интервал равен

$$\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$$

Исследуем сходимость рядов на концах этого интервала.

При $x = \frac{3}{2}$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)\cdot 2^n}{(n^3+2n)\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n}$$

Сравним полученный ряд с гармоническим рядом.

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^3+2n} : \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3+n}{n^3+2n} = 1$$

$1 \neq 0$, как известно, гармонический ряд расходится, значит и сравниваемый ряд расходится.

При $x = \frac{1}{2}$ получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n^2+1)\cdot 2^n}{(n^3+2n)\cdot 2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2+1}{n^3+2n}$$

Применим признак Лейбница:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^3+2n} = 0$$

Общий член ряда стремится к нулю при $n \to \infty$, значит знакочередующийся ряд сходится.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$